

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	B
2	E
3	E
4	D
5	C
6	C
7	B
8	C
9	C
10	C

Problema	Risposta corretta
11	B
12	C
13	E
14	E
15	D
16	B
17	B
18	B
19	B
20	D

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(B)**.

Sia P la popolazione di Zoranel fino al 2013. La percentuale degli androidi di vigilanza sulla popolazione totale risultava in quell'anno uguale a $q = \frac{5}{100} \frac{60}{100} = \frac{3}{100}$ ed il numero di tali androidi di vigilanza uguale a qP . Dopo l'arrivo degli esiliati, la popolazione salì a $P' = P + \frac{10}{100}P = \frac{11}{10}P$, mentre la percentuale degli androidi di vigilanza sul totale scese al valore $q' = \frac{qP}{P'} = q \frac{10}{11}$. Dunque la percentuale scese di $q - q' = \frac{1}{11}q$, che è inferiore a $\frac{1}{10}q$.

[Problema proposto da A. Sambusetti]

2. La risposta è **(E)**.

Ad ogni lancio della moneta la probabilità di ottenere testa è la stessa, indipendentemente dagli esiti dei lanci precedenti. Dato che la moneta non è truccata questa probabilità è $1/2$.

[Problema proposto da P. Leonetti]

3. La risposta è **(E)**.

Consideriamo la funzione g definita da $g(x) = (f(x))^3 + f(x)$; per ogni x si ha

$$g(-x) = (f(-x))^3 + f(-x) = (-f(x))^3 - f(x) = -[(f(x))^3 + f(x)] = -g(x),$$

quindi g è dispari, ovvero la risposta **(E)** è corretta. Proviamo anche che le altre risposte non sono corrette. Scegliendo f definita da $f(x) = x$, che è una funzione dispari, si vede che le funzioni $f(x) - 1 = x - 1$ e $(f(x))^3 + 1 = x^3 + 1$ non sono dispari (per esempio, non si annullano per $x = 0$, mentre tutte le funzioni dispari sono nulle per $x = 0$), quindi le risposte **(A)** e **(D)**

non sono corrette. Analogamente la funzione definita da $(f(x))^2 = x^2$ non è dispari, quindi la risposta **(B)** non è corretta; infine la funzione definita da $(f(x))^2 + f(x) = x^2 + x$ non è dispari (infatti, ad esempio, $(-1)^2 + (-1) = 0 \neq -(1^2 + 1) = 2$), quindi la risposta **(C)** non è corretta. [Problema proposto da P. Leonetti]

4. La risposta è **(D)**.

Ricordiamo la formula del cambio di base per i logaritmi; se a , b e c sono tre numeri positivi, e diversi da 1, si ha

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$

Di seguito scriviamo semplicemente $\log$ per indicare il logaritmo in base 10. Applicando la formula precedente con $c = 10$, otteniamo

$$\begin{aligned} \log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \dots \cdot \log_{126}(127) \cdot \log_{127}(128) &= \frac{\log(3)}{\log(2)} \cdot \frac{\log(4)}{\log(3)} \cdot \dots \cdot \frac{\log(127)}{\log(126)} \cdot \frac{\log(128)}{\log(127)} \\ &= \frac{\log(128)}{\log(2)} = \frac{\log(2^7)}{\log(2)} = 7. \end{aligned}$$

[Problema proposto da P. Leonetti.]

5. La risposta è **(C)**.

Sia H l'altezza del trapezio ed h l'altezza del triangolo EDC sulla base DC . Considerando la retta parallela alle basi del trapezio e passante per E , segue dal teorema di Talete che $h = \frac{1}{2}H$. L'area del triangolo è allora $\mathcal{A}(DCE) = \frac{1}{2}(h \cdot DC) = \frac{1}{4}(H \cdot DC)$ mentre l'area del trapezio è uguale a $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + DC)H$. Dunque $\frac{\mathcal{A}(DCE)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{DC}{2(AB+DC)} = \frac{DC}{2(3DC+DC)} = \frac{1}{8}$. [Problema proposto da P. Negrini]

6. La risposta è **(C)**.

Indichiamo con ABC il triangolo, con A il vertice comune alla circonferenza, e con B', C' rispettivamente i due punti di intersezione dei lati AB , AC con essa. Notiamo che, per simmetria, il lato $B'C'$ è parallelo a BC , dunque $AB'C'$ è simile a ABC ed è equilatero. Il centro del cerchio coincide dunque col baricentro del triangolo $AB'C'$; se $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ è il raggio del cerchio, l'altezza h del triangolo $AB'C'$ vale allora $h = \frac{3}{2}r$ ed il lato $AB' = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \sqrt{3}r$. L'area del triangolo più piccolo vale quindi $\mathcal{A}(AB'C') = \frac{1}{2}h \cdot AB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, mentre l'area della parte di cerchio non coperta dal triangolo vale $\mathcal{A} = \frac{2}{3}[\pi r^2 - \mathcal{A}(AB'C')] = \frac{2}{3}[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}]r^2 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$. [Problema proposto da C. Balocchi]

7. La risposta è **(B)**.

Indichiamo i vertici del cubo con le lettere da A a H , in modo che $ABCD$ (in quest'ordine) sia una faccia; chiamiamo E, F, G, H i vertici della faccia opposta, in modo che il vertice A sia collegato con uno spigolo ad E , il vertice B sia collegato ad F , il vertice C a G , e infine D ad H . Il percorso $ABCDHGF E$ è un percorso lungo 7 che tocca tutti i vertici del cubo.

Per dimostrare che non ne esiste uno più corto, osserviamo che ogni percorso che tocca tutti e gli 8 vertici del cubo è costituito da (almeno) 7 percorsi che partono da un vertice del cubo e ne raggiungono un altro. Ma visto che due vertici qualunque del cubo distano tra loro almeno 1, la lunghezza totale deve essere almeno 7.

[Problema proposto da F. Poloni]

8. La risposta è **(C)**.

Le coppie sono del tipo $(k, k + 1007)$. Sappiamo che k divide $k + 1007$ se e solo se k divide 1007.

Poiché $1007 = 19 \cdot 53$, e dato che i numeri 19 e 53 sono primi, gli unici k possibili risultano $k = 1, 19, 53, 1007$.

[Problema proposto da G. Barbarino]

9. La risposta è **(C)**.

In base ai dati del problema dobbiamo scrivere 2014 come somma di potenze di 2 distinte tra loro. Poiché $2^{11} = 2048 > 2014$, dobbiamo usare potenze con esponente minore o uguale a 10; poiché inoltre 2014 è pari, e tutte le potenze di due tranne $2^0 = 1$ sono pari, possiamo escludere 1. Dunque dobbiamo scrivere 2014 come somma di alcuni tra i numeri:

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \quad 128, \quad 256, \quad 512, \quad 1024,$$

prendendo ciascuno di loro al più una volta. In effetti questo è possibile in uno e un solo modo, che è il seguente

$$2014 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2.$$

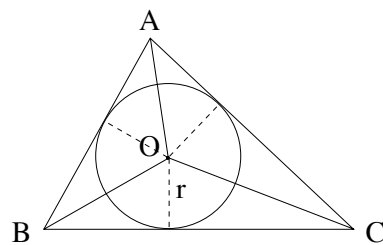
Gli addendi necessari per ottenere 2014 in questo modo sono 9, che è anche la risposta al problema.

[Problema proposto da G. Barbarino]

10. La risposta è **(C)**.

Siano r ed O rispettivamente il raggio ed il centro del cerchio inscritto, e siano a, b e c le lunghezze dei lati opposti ai vertici A, B, C . Se p è il semiperimetro del triangolo, l'area del triangolo vale allora

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AOC) + \mathcal{A}(AOB) + \mathcal{A}(BOC) = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = rp$$



Dunque, per la formula di Erone,

$$r = \mathcal{A}(ABC)/p = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{15}/6$$

e l'area del cerchio inscritto vale allora $\pi r^2 = 5\pi/12$.

[Problema proposto da A. Sambusetti]

11. La risposta è **(B)**.

Ponendo $t = y^k$ l'equazione è equivalente all'equazione di secondo grado in t

$$t^2 - x^k t + x^{2k} = 0.$$

Questa equazione ha discriminante $\Delta = x^{2k} - 4x^{2k}$, che è negativo a meno che $x = 0$; esiste quindi una soluzione solo se $x = 0$, nel qual caso si ottiene immediatamente $y = t = 0$.

[Problema proposto da P. Leonetti]

12. La risposta è **(C)**.

Poiché $DC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}(BD + DC)$, si ha $BD = 2DC$. D'altra parte, dal teorema della bisettrice deduciamo che $AB : AC = BD : DC = 2$; segue che il perimetro vale

$$AB + AC + BC = 2AC + AC + 3CD = 3(AC + CD) = 36.$$

[Problema proposto da G. Barbarino]

13. La risposta è **(E)**.

Consideriamo il numero $n = 2^5 = 32$ che ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Il suo quadrato $n^2 = 2^{10} = 1024$ ha esattamente 11 divisori, ovvero tutti i numeri della forma 2^k , con $k = 0, 1, 2, \dots, 10$. Questo esempio porta ad escludere le risposte **(B)**, **(C)** e **(D)**. D'altra parte se consideriamo $n = 12$ vediamo che anch'esso ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 3, 4, 6, 12; il suo quadrato $n^2 = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ ha come divisori tutti i numeri della forma $2^k \cdot 3^h$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e $h = 0, 1, 2$, che sono in tutto 15. Quindi la risposta **(A)** non è corretta e vediamo che il numero di divisori di n^2 in generale dipende da n .

[Problema proposto da A. Bianchi]

14. La risposta è **(E)**.

Scriviamo il polinomio $p(x)$ in forma estesa, indicando con N il suo grado:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

$a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N$ sono i coefficienti di $p(x)$ e sono tutti numeri interi. Segue che

$$p(169) - p(1) = a_N(169^N - 1) + a_{N-1}(169^{N-1} - 1) + \dots + a_1(169 - 1).$$

Osserviamo ora che ciascun termine $a_k(169^k - 1)$, comunque si scelga l'esponente k (intero e maggiore o uguale a 1), è divisibile per $(169 - 1) = 168$; vale infatti l'identità

$$y^k - 1 = (y - 1)(y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1)$$

per ogni numero reale y . Quindi $p(169) - p(1)$ è somma di numeri divisibili per 168, e dunque è anch'esso divisibile per 168. In particolare, poiché 56 divide 168, $p(169) - p(1)$ è divisibile per 56, quindi la risposta **(E)** è corretta. Osserviamo anche che, scegliendo $p(x) = x^2$ si ha $p(169) - p(1) = 169^2 - 1 = 168 \cdot 170$ che non è divisibile né per 25, né per 32, né per 36, né per 49. Quindi le risposte **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** non sono corrette.

[Problema proposto da G. Barbarino]

15. La risposta è **(D)**.

Scegliendo opportunamente i coefficienti del sistema si vede che le soluzioni cercate possono essere infinite. Siano infatti $a = b = c = d = e = f = 1$. In questo caso le due equazioni coincidono con l'equazione $x^2 + xy = 1$. Scelto comunque x strettamente compreso tra 0 e 1, se poniamo

$$y = \frac{1 - x^2}{x}$$

la coppia (x, y) è soluzione del sistema. Occorre verificare se y è compresa tra 0 e 1. Poiché $0 < x < 1$, si ha certamente $y > 0$; inoltre, sapendo che $x > 0$, si hanno le seguenti equivalenze:

$$y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x^2}{x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

Dal momento che $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$, per ogni x strettamente compreso tra $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e 1 la coppia

$\left(x, \frac{1 - x^2}{x}\right)$ è soluzione del sistema. Quindi le soluzioni possono essere infinite.

[Problema proposto da P. Leonetti]

16. La risposta è **(B)**.

Se N è un numero naturale, il numero di zeri con cui esso termina (scritto in base 10) coincide con la massima potenza di dieci che divide N . Questo fatto continua ad essere vero in una qualsiasi base b : il numero di zeri con cui termina N scritto in base b coincide con la massima potenza di b che divide N .

Sia ora $N = n!$, con n numero naturale; cerchiamo la massima potenza di 5 che divide N (il ragionamento che segue funziona anche sostituendo 5 con un qualsiasi numero primo). L'idea è che nel moltiplicare tutti i numeri k da 1 a n , via via che k aumenta incontreremo vari multipli di 5; per ogni k che è un multiplo di 5, la potenza di 5 che divide N aumenta almeno di 1. Più precisamente: se k è multiplo di 5 ma non di 5^2 , la potenza aumenta esattamente di 1; se k è multiplo di 5^2 ma non di 5^3 , la potenza aumenta di 2, se k è un multiplo di 5^3 ma non di 5^4 tale potenza aumenta di 3, e così via. Se ad esempio vogliamo calcolare la massima potenza di 5 che divide $26!$, osserviamo che nel moltiplicare i numeri da 1 a 26 incontriamo i seguenti multipli di 5: 5, 10, 15, 20 (che non sono multipli di 5^2) e 25, che è un multiplo di 5^2 ; dunque la massima potenza di 5 che divide $26!$ è: $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$.

Consideriamo ora $N = 2000!$. Nel moltiplicare tutti i numeri k da 1 a 2000 incontriamo:

- 3 multipli di $625 = 5^4$
- 16 ($= 2000/125$) multipli di $125 = 5^3$
- 80 ($= 2000/25$) multipli di $25 = 5^2$
- 400 ($2000/5$) multipli di 5.

La massima potenza di 5 che divide N è dunque $499 = 400 + 80 + 16 + 3$. Per determinare ora la massima potenza di 10 che divide N occorre trovare anche la massima potenza di 2 che divide N . Questa è senz'altro maggiore di 499, in quanto $2000!$ contiene il prodotto di 1000 numeri pari, dunque $2000!$ è divisibile almeno per 2^{1000} . Dunque la massima potenza di 10 che divide N è 499. In conclusione $X = Y$ e la risposta al problema è 0.

[Problema proposto da P. Leonetti]

17. La risposta è **(B)**.

Proviamo che $4^{30} > 5^{25}$. Infatti, estraendo la radice quinta di entrambi i numeri troviamo che la disuguaglianza cercata equivale a $4^6 = 2^{12} = 4096 > 5^5 = 3125$. Proviamo ora che $5^{25} > 3^{33}$; è sufficiente mostrare che $5^{25} > 3^{35}$, che implica la precedente e equivale a $5^5 > 3^7$. Poiché $5^5 = 3125$ e $3^7 = 2187$ tale disuguaglianza è vera. In conclusione $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$.

[Problema proposto da A. Sambusetti]

18. La risposta è **(B)**.

Calcoliamo prima la probabilità che tra le due casse scelte a caso vi sia quella contenente banane radioattive. Le possibili scelte di 2 casse su 5 sono $\binom{5}{2} = 10$. I possibili modi di scegliere 2 delle 4 casse che non contengono banane radioattive sono $\binom{4}{2} = 6$. La probabilità di *non* scegliere la cassa contenente banane radioattive è dunque uguale a $\frac{6}{10}$, mentre quella di sceglierla è $1 - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$. Indichiamo ora con N il numero di banane radioattive presenti nell'unica cassa che ne contiene. Scegliendo a caso una banana da questa cassa la probabilità che sia radioattiva è $\frac{N}{72}$. Quindi la probabilità che una delle due banane scelte sia radioattiva è:

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{N}{72} = \frac{N}{180}.$$

Sapendo che p è, per ipotesi, uguale a $\frac{5}{100}$, deduciamo che $\frac{N}{180} = \frac{5}{100}$, cioè $N = 9$.

[Problema proposto da F. Getman]

19. La risposta è **(B)**.

I due trinomi p e q possono essere scritti nella forma

$$p(x) = Ax^R + Bx^S + Cx^T, \quad q(x) = ax^r + bx^s + cx^t$$

dove A, B, C, a, b, c sono numeri diversi da zero, R, S, T sono numeri interi maggiori o uguali a zero, distinti tra loro, e lo stesso si può dire per r, s, t . In particolare possiamo supporre: $R > S > T$ e $r > s > t$. Il prodotto tra p e q conterrà in generale 9 termini

$$p(x)q(x) = (Ax^R + Bx^S + Cx^T)(ax^r + bx^s + cx^t) = Aax^{R+r} + \dots + Ccx^{T+t}$$

ma si potranno verificare delle cancellazioni. D'altra parte i due monomi di grado massimo e di grado minimo Aax^{R+r} e Ccx^{T+t} non potranno essere cancellati da nessun altro monomio, che avrà grado strettamente minore o strettamente maggiore rispetto a loro. Quindi il prodotto tra $p(x)$ e $q(x)$ contiene sicuramente almeno due monomi. Con un opportuno esempio si vede anche che può succedere che ne contenga esattamente due. Proviamo con due trinomi semplici, del tipo

$$(x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Affinché nel prodotto restino solo i termini di grado 0 e di grado 4, è sufficiente che

$$\begin{cases} c = -a \\ b + d = a^2 \\ ad + bc = a(d - b) = 0 \end{cases}$$

ed effettivamente, scegliendo $c = -a = -1$ e $b = d = \frac{1}{2}$ si ottiene l'identità

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = x^4 + \frac{1}{4}$$

[Problema proposto da F. Poloni]

20. La risposta è **(D)**.

Consideriamo i nove quadratini evidenziati in figura: poiché ogni tessera può coprirne non più di uno alla volta, servono almeno 9 tessere per coprire il quadrato. D'altra parte, è effettivamente possibile coprire tutto il quadrato con sole 9 tessere: è sufficiente coprire le prime due colonne con tre tessere messe in verticale, quindi le seconde due colonne e l'ultima colonna con 3 + 3 tessere disposte nello stesso modo.

[Problema proposto da L. Pernazza]

